1. Vlastnosti limity funkce

Měli bychom si uvědomit, že zápis $\lim_{x\to a} f(x) = A$ znamená, že limita existuje a je rovna A.

Věta 1.1. *(* **Lokální vlastnost limity)** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nechť dále existuje $P(a)$ takové, že $\forall x \in P(a)$ platí $f(x) = g(x)$. Pak $\lim_{x\to a} f(x) = A$, právě když $\lim_{x\to a} g(x) = A$.*

Věta 1.2. *(***O jednoznačnosti limity***) Pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$ existuje nejvýše jedna limita f v a. (Stejně tak pro limitu zleva, resp. zprava).*

Věta 1.3. *(***O jednostranných limitách***) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$. Pak*
$\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, právě když $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = A$.

Věta 1.4. *(***O omezenosti***) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Pak existuje $P(a) \subset D(f)$ takové, že f je na $P(a)$ omezená. To znamená, že existuje také $K > 0$ takové, že pro $x \in P(a)$ platí $|f(x)| \leq K$.*

Definice 1.1. *(***Aritmetika v** $\mathbb{R}^*$ *) Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ a pro nevlastní čísla $\infty, -\infty$ definujeme:*

- **Uspořádání:**
$$-\infty < x < \infty,\ |\infty| = |-\infty| = \infty,$$
- **Součet:**
$$x + \infty = \infty + x = \infty,\ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty, \infty + \infty = \infty,\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty,$$
  Pozn.: K.H. Borovský: "Stokrát si plivni do moře, ono se nezmění."
  součet se nedefinuje, má-li tvar
$$\infty + (-\infty).$$
- **Součin:**
  -
$$x.\infty = \infty.x = \infty,\ x.(-\infty) = (-\infty).x = -\infty,\ \textit{je-li } x > 0,$$
  -
$$x.\infty = \infty.x = -\infty,\ x.(-\infty) = (-\infty).x = \infty,\ \textit{je-li } x < 0,$$
  -
$$\infty.\infty = \infty,\ \infty.(-\infty) = -\infty,$$
  součin se nedefinuje, má-li tvar
$$0 \cdot (\pm\infty).$$
- **Podíl:**
  -
$$\frac{1}{\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0,$$
  -
$$\frac{\infty}{x} = \infty \ \textit{je-li } x > 0,$$
  podíl se nedefinuje, má-li tvar
$$\frac{\infty}{0},\ \frac{-\infty}{0},\ \frac{x}{0}, x \neq 0,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}$$

Věta 1.5. *(***O limitě absolutní hodnoty***) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$. Jestliže*
$\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak $\lim_{x\to a} |f(x)| = |A|$.

Věta 1.6. *(***O aritmetických operacích s limitami***) Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$,*
$\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = B$ a $A, B \in \mathbb{R}^*$. Potom

1. *je-li součet $A+B$ definován, je $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$ (slovy: limita součtu je součet limit),*
2. *je-li součin $A.B$ definován, je $\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = A.B$ (slovy: limita součinu je součin limit),*
3. *je-li podíl $\frac{A}{B}$ definován, je $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ (slovy: limita podílu je podíl limit).*

Věta 1.7. *(***O limitě složené funkce***) Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$. Nechť dále současně platí podmínky*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$,
2. $\lim_{y\to A} g(y) = B \in \mathbb{R}^*$,
3. *existuje $P(a)$ takové, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí: je-li $x \in P(a)$ pak $f(x) \neq A$.*

Pak $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = \lim_{x\to a}(g(f(x))) = B$.

Věta 1.8. (**O limitním přechodu v nerovnost**) *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$. Nechť dále $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$.*

(1) *Jestliže $A < B$, pak existuje $P(a)$ takové, že pro $x \in P(a)$ je $f(x) < g(x)$.*
(2) *Jestliže existuje $P(a)$ tak, že pro $x \in P(a)$ je $f(x) \le g(x)$, pak $A \le B$.*

Věta 1.9. (**O důsledcích věty o limitním přechodu v nerovnost**)
Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$.

(1) *Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a existuje okolí $P(a)$ tak, že g je omezená na $P(a)$. Pak $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = 0$.*
(2) *Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = A > 0$, pak existuje okolí $P(a)$ takové, že pro $x \in P(a)$ je $f(x) > 0$.*

Věta 1.10. (**O sevření nebo o křídlech**) *Nechť $a \in \mathbb{R}^*, f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nechť dále*

(1) *existuje $P(a)$ takové, že pro $x \in P(a)$ platí $h(x) \le f(x) \le g(x)$,*
(2) $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}^*$.

Pak také $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

2. Spojitost funkce

Definice 2.1. *Říkáme, že $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je* spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, *právě když*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Analogicky říkáme, že f je spojitá zprava *resp.* zleva, *právě když* $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, *resp.* $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Věta 2.1. (**O vlastnostech spojitosti**) *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pak*

(1) *f je spojitá v bodě a, právě když je v a spojitá zprava i zleva.*
(2) *Jestliže je f spojitá v a, pak existuje $U(a)$ takové, že f je omezená na $U(a)$.*
(3) *Jsou-li f, g spojité v a, pak $|f|, f + g, f.g$ jsou také v a spojité. Pokud $g(a) \ne 0$, je v a spojitá i $\frac{f}{g}$.*
(4) *Nechť f je spojitá v a a g spojitá v $A = f(a)$. Pak je také $g \circ f$ je spojitá v a.*

Věta 2.2. (**O limitě složené funkce**) *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a nechť*

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$,
(2) *g je spojitá v A.*

Pak $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(A)$.

Věta 2.3. (**O spojitosti elementárních funkcí**) *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \in D(f)$ je elementární. Pak v každém bodě $x \in D(f)$ je f spojitá.*

- Doma si přečtěte a rozmyslete kapitolu: **Globální vlastnosti spojitosti.** ... viz. str.: 115-120

Definice 2.2. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována na intervalu (a, b).*

(1) *Říkáme, že f* je spojitá na (a, b), *je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.*
(2) *Říkáme, že f* je spojitá na $\langle a, b\rangle$, *je-li spojitá na (a, b), v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.*

Věta 2.4. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak:*

(1) (**O omezenosti**) *f je omezená na $\langle a, b\rangle$.*
(2) (**O maximu a minimu**) *f nabývá na $\langle a, b\rangle$ svého maxima a minima. To znamená, že existují $c, d \in \langle a, b\rangle$ takové, že $f(c) = \min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ a $f(d) = \max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$, což také znamená že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ je*

$$f(c) \le f(x) \le f(d).$$

Nechť navíc $f(a) < f(b)$. Pak

(3) (**O nabývání mezihodnot**) *f nabývá v intervalu (a,b) všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$. To znamená, že pro libovolné číslo $d \in (f(a), f(b))$ existuje číslo $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = d$.*

Věta 2.5. (**Bolzanova věta**) *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na uzavřeném intervalu $< a, b >$ taková, že $f(a).f(b) < 0$. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $c \in (a, b)$ a $f(c) = 0$.*

Příklad 2.1. *Určete řešení rovnice tg $x = x$.*

Řešení: Výsledky získané metodou bisekce budeme zapisovat do tabulky.